SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1999-2000

Francesco Uguzzoni

SOLUZIONI GLOBALI POSITIVE PER UN'EQUAZIONE ELLITTICA QUASILINEARE

14 marzo 2000

Tecnoprint - Bologna 2000

Sunto. Presentiamo un risultato di esistenza di soluzioni intere positive per un'equazione ellittica quasilineare. Il risultato viene ottenuto con un argomento di mini-max e si basa su alcuni recenti risultati di unicità per il problema all'infinito associato all'equazione.

Abstract. We establish an existence result of positive entire solution for a quasilinear elliptic equation. We obtain such result with a min-max procedure based on some recent uniqueness results for the problem at infinity associated to the equation.

Soluzioni globali positive per un'equazione ellittica quasilineare

F. UGUZZONI

Risultati ottenuti in collaborazione con G. Citti

1. Introduzione. In questo seminario presentiamo un risultato di esistenza per la seguente equazione semilineare in $\mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + u^{p-1} - q(x)u^\alpha = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u > 0, \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{1}$$

dove Δ_pè il p-Laplaciano in $\mathbb{R}^N$, $1 < p < 2 \leq N$, $1 < \alpha < p^* - 1 = \frac{pN}{N-p} - 1$ e $q \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ è una funzione positiva con limite nonnegativo q_∞ all'infinito.

Problemi del tipo (1) hanno riscontrato molto interesse negli ultimi anni, soprattutto nel caso $p = 2$, quando l'operatore Δ_p è semplicemente l'operatore di Laplace. Sotto varie ipotesi sulla funzione q nell'equazione, sono state introdotte diverse tecniche per superare le difficoltà dovute alla mancanza di compattezza causata dalla non limitatezza del dominio. I primi risultati di esistenza sono stati ottenuti quando q è radialmente simmetrico ([BeL], [C1], [E]). Se q non è radiale ma $q_\infty = \inf_{\mathbb{R}^N} q$ o $q \in L^{p_0}$ per opportuni p_0, si sono trovati risultati di esistenza per (1) usando varianti del teorema del passo di montagna e il principio di concentrazione di compattezza (si vedano [DN], [L1], [L2] per $p = 2$, [BC], [GS], [O], [Y] per valori di p generici). In tutti questi lavori si richiede che α sia più piccolo dell'esponente critico; osserviamo comunque che risultati di tipo Brezis-Nirenberg con $\alpha = p^* - 1$ sono stati ottenuti anche per il p-Laplaciano su domini non limitati ([GA], [NSJ], [SY]).

Quando $p = 2$, è noto che la soluzione del problema all'infinito

$$-\Delta_p \omega + \omega^{p-1} - q_\infty \omega^\alpha = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^N \tag{2}$$

è unica. Inoltre, le successioni di Palais-Smale del funzionale J naturalmente associato al problema (1) possono essere espresse in termini di questa soluzione (si veda per esempio [BeC]). Come conseguenza sono stati ottenuti risultati di esistenza per (1) molto sofisticati: si vedano [BLn], [BeC] (su domini esterni) e [BL] (su $\mathbb{R}^N$). In particolare Bahri e Lions hanno introdotto una profonda (e complicata) argomentazione topologica per studiare il problema quando la forza di convergenza di q a q_∞ è confrontabile con l'andamento asintotico di ω all'infinito. Successivamente Bahri e Li hanno fornito un risultato di esistenza semplice ed elegante, basato su un procedimento di mini-max, sotto ipotesi leggermente più forti su q. Menzioniamo anche i lavori [ABC], [DF], [W] dove si considera l'equazione perturbata

$$-\varepsilon\Delta u + u - q(x)u^\alpha = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^N$$

per $\varepsilon \to 0$ e si richiedono condizioni solo locali su q. Non sembra comunque possibile utilizzare queste ipotesi così deboli per il problema (1) dove il valore di ε è fissato.

Molto recentemente Damascelli, Pacella e Ramaswamy [DPR] hanno dimostrato, per il p-Laplaciano, un importante risultato di simmetria radiale attraverso la tecnica dei piani mobili. Tale risultato unito ai risultati di unicità per soluzioni radiali dovuti a Citti [C2] (si veda anche [PS]) permette di stabilire l'unicità dei *ground states* dell'equazione all'infinito (2) per tutti i valori di $p < 2$. Dunque anche in questo caso è possibile fornire una completa caratterizzazione dei livelli di compattezza del funzionale J (Teorema 2).

Sfruttando questo fatto e la tecnica di mini-max introdotta da Bahri e Li nel caso $p = 2$ riusciamo a ricavare il nostro risultato di esistenza. In primo luogo stabiliamo una precisa stima all'infinito del ground state di (2):

$$\omega(x) \sim |x|^{-\frac{N-1}{p(p-1)}} \exp\Big(-\frac{|x|}{(p-1)^{\frac{1}{p}}}\Big) \sim \omega'(x).$$

Quindi, sotto le ipotesi che $q_\infty > 0$ ed esistano $c > 0$ e $\mu > \frac{2}{(p-1)^{\frac{1}{p}}}$ tali che

$$q(x) \geq q_\infty - c\exp(-\mu|x|), \tag{3}$$

otteniamo alcune delicate stime dell'energia dalle quali deduciamo il seguente risultato di esistenza.

TEOREMA 1 *Siano $p \in]1,2[$, $\alpha \in]1, p^* - 1[$ e sia $q \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ una funzione positiva con un limite positivo q_∞ all'infinito, verificante (3). Allora il problema (1) ha una soluzione $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap C^{1+\beta}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, per un $\beta \in]0,1[$.*

2. Risultati preliminari. Introduciamo innanzitutto alcune notazioni. Denotiamo con $(X, \|\cdot\|)$ lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con la norma $\|u\|^p = \|\nabla u\|_p^p + \|u\|_p^p$ e introduciamo i funzionali

$$J, J_\infty \in C^1(X \setminus \{0\}, \mathbb{R}), \quad J(u) = \frac{\|u\|^p}{\left(\int q(x)|u|^{\alpha+1}\right)^{\frac{p}{\alpha+1}}}, \quad J_\infty(u) = \frac{\|u\|^p}{\left(q_\infty \int |u|^{\alpha+1}\right)^{\frac{p}{\alpha+1}}}, \tag{4}$$

$$I, I_\infty \in C^1(X, \mathbb{R}), \quad I(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{\alpha+1}\int q(x)|u|^{\alpha+1}, \quad I_\infty(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{q_\infty}{\alpha+1}\int |u|^{\alpha+1}. \tag{5}$$

Assumeremo sempre che p, α e q verifichino le ipotesi del Teorema 1. Poniamo poi

$$\Sigma = \{u \in X | \ \|u\| = 1\}, \quad \Sigma^+ = \{u \in \Sigma | \ u \geq 0\}$$

e

$$S_1 = \inf_{X \setminus \{0\}} J_\infty, \quad S_n = n^{1-\frac{p}{\alpha+1}} S_1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

In [BC] viene provato il seguente teorema di rappresentazione per successioni (PS).

TEOREMA BC *Sia u_m una successione nonnegativa in X tale che $I(u_m) \to \ell \in \mathbb{R}$ e $dI(u_m) \to 0$ per $m \to +\infty$. Allora esistonouna funzione nonnegativa $u_0 \in X$, un intero non negativo k, k funzioni nonnegative non banali $\omega_1, ..., \omega_k \in X$ e k successioni $(y_{1,m}), ..., (y_{k,m})$ in $\mathbb{R}^N$, tali che $|y_{j,m}| \to +\infty$ per $m \to +\infty$ per ogni $j = 1, ..., k$ e*

$$u_m = u_0 + \sum_{j=1}^{k} \omega_j(\cdot - y_{j,m}) + o(1) \quad \text{in } X, \quad \text{per } m \to +\infty,$$

$$I(u_m) = I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(\omega_j) + o(1) \quad \text{per } m \to +\infty,$$

$$dI(u_0) = 0, \qquad dI_\infty(\omega_j) = 0 \quad \forall j = 1, ..., k.$$

Dai risultati di regolarità di [S] e [D] e dal principio di massimo forte per Δ_p (si veda [V]) segue che le funzioni ω_j del teorema sopra sono soluzioni di

$$\begin{cases} -\Delta_p \omega + \omega^{p-1} - q_\infty \omega^\alpha = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ 0 < \omega \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \\ \omega(x) \to 0 & \text{per } |x| \to +\infty. \end{cases} \tag{6}$$

Poichè $1 < p < 2$, possiamo dunque dedurre da [DPR, Theorem 1.1] che ogni ω_j è radialmente simmetrica attorno a qualche punto di $\mathbb{R}^N$. Inoltre i risultati di unicità di [C2] per l'equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} (|\omega'(r)|^{p-2}\omega'(r))' + \frac{N-1}{r}|\omega'(r)|^{p-2}\omega'(r) - \omega(r)^{p-1} + q_\infty \omega(r)^\alpha = 0 & 0 < r < +\infty, \\ \omega > 0, \quad \omega'(0) = 0, \quad \omega(+\infty) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

assicurano che le ω_j sono, a meno di traslazioni, tutte uguali a una funzione radiale positiva ω che è l'unica soluzione radiale di(6). Osserviamo esplicitamente che tale soluzione ω esiste e verifica

$$I_\infty(\omega) = \inf\{I_\infty(u) | u \in X \setminus \{0\}, dI_\infty(u)u = 0\} = \Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha+1}\Big) S_1^{\frac{\alpha+1}{\alpha+1-p}},$$

$$J_\infty(\omega) = \inf_{X \setminus \{0\}} J_\infty = S_1;$$

inoltre ω è radialmente decrescente (si veda ad esempio [BC, Remark 1]). Nel Lemma 4 del prossimo paragrafo studieremo il comportamento di ω all'infinito. Se u_m è una successione (PS) di $J|_\Sigma$ a un livello $\ell \in \mathbb{R}$, allora $J(u_m)^{\frac{\alpha+1}{p(\alpha+1-p)}} u_m$ è una successione (PS) di I al livello $(\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha+1})\ell^{\frac{\alpha+1}{\alpha+1-p}}$; dunque dal Teorema BC e dall'unicità dei ground states di (6) possiamo dedurre il seguente risultato di compattezza per le successioni (PS) di J.

TEOREMA 2 *Sia u_m una successione in Σ^+ tale che $J(u_m) \to \ell \in \mathbb{R}$ e $dJ|_\Sigma(u_m) \to 0$ per $m \to +\infty$. Se $\ell \notin \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, allora esiste $u_0 \in X$ tale che $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, $dI(u_0) = 0$. In altri termini u_0 è una soluzione debole di (1).*

OSSERVAZIONE 3 *Se u_0 è una soluzione di (1), allora per i risultati in [S] e [D], $u_0 \in C^{1+\beta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ per qualche $\beta > 0$, $u_0(x) \to 0$ per $|x| \to +\infty$ e u_0 è strettamente positiva, per i principio di massimo forte provato in [V].*

3. Prova del Teorema di esistenza. Per provare il nostro risultato seguiamo un tecnica introdotta per $p = 2$ da Bahri e Li [BL]. Per prima cosa studiamo il comportamento asintotico della soluzione ω di (6).

LEMMA 4 *Sia $\omega = \omega(|x|)$ l'unica soluzione radiale di (6). Allora esistono due costanti positive*

c_1, c_2 *tali che, per grandi* $r = |x|$,

$$\begin{cases} c_1 r^{-\gamma^+} \exp(-\theta r) \le \omega(r) \le c_2 r^{-\gamma} \exp(-\theta r) \\ c_1 r^{-\gamma^+} \exp(-\theta r) \le -\omega'(r) \le c_2 r^{-\gamma} \exp(-\theta r) \end{cases} \qquad se\ N \ge 3;$$

$$\begin{cases} c_1 r^{-\gamma} \exp(-\theta r) \le \omega(r) \le c_2 r^{-\gamma^-} \exp(-\theta r) \\ c_1 r^{-\gamma} \exp(-\theta r) \le -\omega'(r) \le c_2 r^{-\gamma^-} \exp(-\theta r) \end{cases} \qquad se\ N = 2;$$

dove abbiamo posto $\theta = (p-1)^{-\frac{1}{p}}$ *e* $\gamma = \frac{N-1}{p(p-1)}$; γ^+ *(rispettivamente* γ^-*) sta per un* $\gamma + \varepsilon$ *(rispettivamente* $\gamma - \varepsilon$*) con* $\varepsilon > 0$.

Dimostrazione. Ponendo $k(r) = |\omega'(r)|^{p-2}\omega'(r)$ e $f(\omega) = \omega^{p-1} - q_\infty \omega^\alpha$, l'equazione in (6) diventa

$$k' + \frac{N-1}{r} k = f(\omega) \qquad \forall r > 0.$$

Poichè $\omega(r) \to 0$ per $r \to +\infty$ e $\alpha > p-1$, otteniamo

$$(r^{N-1}k)' = r^{N-1} f(\omega) = r^{N-1}\omega^{p-1}(1 + o(1)) \qquad \text{as } r \to +\infty.$$

Dunque $(r^{N-1}k)' > 0$ per grandi $r > 0$. Nel seguito assumeremo sempre che r sia molto grande. Dunque $r^{N-1}k$ è strettamente crescente. Ne viene che $k = |\omega'|^{p-2}\omega' < 0$. Infatti, se fosse $k > 0$ in un punto r_0, sarebbe $\omega' > 0$ in $[r_0, +\infty[$ contraddicendo il fatto che ω è una funzione positiva che si annulla all'infinito. Pertanto ω è strettamente crescente e $k = -(-\omega')^{p-1}$. In particolare ω è C^2 e

$$f(\omega) = k' + \frac{N-1}{r} k = (p-1)(-\omega')^{p-2}\omega'' - \frac{N-1}{r}(-\omega')^{p-1}. \tag{8}$$

Poniamo ora $F(\omega) = \int_0^\omega f(s)ds$ e $E = \frac{p-1}{p}|\omega'|^p - F(\omega)$. Da (8) segue

$$E' = -\frac{N-1}{r}|\omega'|^p < 0.$$

Dunque E è decrescente e, poichè $F(\omega)$ si annulla all'infinito, anche E ha un limite finito che deve essere necessariamente 0, poichè ω si annulla all'infinito. Ne viene $E \ge 0$. D'altra parte

$$0 \le E = \frac{1}{p}\Big((p-1)|\omega'|^p - \omega^p(1 + o(1))\Big), \qquad \text{per } r \to +\infty,$$

e dunque $|\omega'|^p \ge \left(\frac{1}{p-1}\right)^- \omega^p$ (per grandi r). Usando $\omega' < 0$ e la definizione di θ, abbiamo

$$\omega' + \theta^- \omega \le 0. \tag{9}$$

Da (9) otteniamo immediatamente

$$\omega(r) \leq M \exp(-\theta^- r). \tag{10}$$

Per ottenere stime più precise utilizziamo ora il principio del confronto per Δ_p. Per un β vicino a γ definiamo $v = v_\beta$ come segue

$$v_\beta(r) = r^{-\beta} \exp(-\theta r).$$

Denotando $v(x) = v(|x|) = v(r)$ calcoliamo

$$\begin{aligned} \Delta_p v &= (|v'|^{p-2}v')' + \frac{N-1}{r}|v'|^{p-2}v' = \\ &= v^{p-1}\theta^{p-2}\left(1+\frac{\beta}{r\theta}\right)^{p-2}\Big((p-1)\theta^2 + \frac{1}{r}(2(p-1)\theta\beta - (N-1)\theta) + \\ &+ \frac{1}{r^2}((p-1)\beta(1+\beta) - (N-1)\beta)\Big). \end{aligned} \tag{11}$$

Prendendo lo sviluppo di Taylor di $(1+\frac{\beta}{r\theta})^{p-2}$, otteniamo

$$\frac{\Delta_p v}{v^{p-1}} = 1 + \theta^{-1}p(\beta-\gamma)\frac{1}{r} + O\Big(\frac{1}{r^2}\Big), \qquad \text{per } r \to +\infty. \tag{12}$$

Poniamo ora

$$\overline{v} = \Lambda v_{\gamma^-}, \qquad \underline{v} = \varepsilon v_{\gamma^+}.$$

Affermiamo che possiamo scegliere $\Lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ e $r_0 > 0$ in modo che

$$\begin{cases} \Delta_p \overline{v}(r) \leq f(\overline{v}(r)) & \forall r > r_0, \\ \overline{v}(r_0) \geq \omega(r_0), \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} \Delta_p \underline{v}(r) \geq f(\underline{v}(r)) & \forall r > r_0, \\ \underline{v}(r_0) \leq \omega(r_0) \end{cases} \tag{14}$$

(ricordiamo la definizione di f: $f(s) = s^{p-1} - q_\infty s^\alpha$). Per fare questo sfruttiamo la stima (10). Fissiamo $\lambda \in]\theta - \theta^-, \theta[$ e scegliamo r_0 abbastanza grande in modo che

$$M r_0^{\gamma^-} \exp(-(\lambda - (\theta - \theta^-))r_0) \leq 1, \tag{15}$$

$$\Big(\frac{2q_\infty r}{\theta^{-1}p(\gamma-\gamma^-)}\Big)^{\frac{1}{\alpha-p+1}} \exp(-(\theta-\lambda)r) \leq 1 \qquad \forall r > r_0. \tag{16}$$

Poniamo poi $\Lambda = \exp(\lambda r_0)$. Da (15) e (10) segue che $\overline{v}(r_0) \geq \omega(r_0)$. Inoltre (12) e (16) danno

$$\frac{\Delta_p \overline{v}}{\overline{v}^{p-1}} = \frac{\Lambda^{p-1}\Delta_p v_{\gamma^-}}{\Lambda^{p-1}v_{\gamma^-}^{p-1}} \leq 1 - \frac{\theta^{-1}p(\gamma-\gamma^-)}{2r} \leq 1 - q_\infty \overline{v}^{\alpha-p+1} = \frac{f(\overline{v})}{\overline{v}^{p-1}} \qquad \forall r > r_0.$$

Questo prova (13). Per provare (14) dobbiamo solo prendere $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo in modo che $\underline{v}(r_0) \leq \omega(r_0)$ e osservare che

$$\frac{\Delta_p \underline{v}}{\underline{v}^{p-1}} = \frac{\varepsilon^{p-1} \Delta_p v_{\gamma^+}}{\varepsilon^{p-1} v_{\gamma^+}^{p-1}} \geq 1 + \frac{\theta^{-1} p(\gamma^+ - \gamma)}{2r} \geq 1 \geq 1 - q_\infty \underline{v}^{\alpha-p+1} = \frac{f(\underline{v})}{\underline{v}^{p-1}} \qquad \forall r > r_0,$$

grazie a (12). Possiamo ora usare il principio di confronto in [DPR, Theorem 3.1]: da (6), (13) e (14) deduciamo

$$\varepsilon r^{-\gamma^+} \exp(-\theta r) = \underline{v}(r) \leq \omega(r) \leq \overline{v}(r) = \Lambda r^{-\gamma^-} \exp(-\theta r) \qquad \forall r > r_0. \tag{17}$$

Vogliamo ora confrontare ω con $v = v_\gamma = r^{-\gamma} \exp(-\theta r)$. Al posto di (12) consideriamo lo sviluppo del secondo ordine

$$\frac{\Delta_p v}{v^{p-1}} = 1 + \frac{1}{2}\theta^{p-2}\gamma(p-1)(3-N)\frac{1}{r^2} + O\Big(\frac{1}{r^3}\Big), \qquad \text{per } r \to +\infty,$$

che segue anch'esso da (11). Questa formula suggerisce di studiare separatamente i casi $N > 3$, $N = 3$ e $N < 3$. Se $N > 3$ poniamo $\overline{v} = \Lambda' v_\gamma$ e, ragionando come sopra, possiamo provare che

$$\omega(r) \leq \Lambda' r^{-\gamma} \exp(-\theta r) \tag{18}$$

(per grandi $r > 0$). Analogamente, se $N = 2$ poniamo $\underline{v} = \varepsilon' v_\gamma$ e otteniamo

$$\omega(r) \geq \varepsilon' r^{-\gamma} \exp(-\theta r). \tag{19}$$

Infine, se $N = 3$ consideriamo lo sviluppo del terzo ordine

$$\frac{\Delta_p v}{v^{p-1}} = 1 - \frac{4}{3}p^{-2}(p-1)^{\frac{3-2p}{p}}(2-p)\frac{1}{r^3} + O\Big(\frac{1}{r^4}\Big), \qquad \text{per } r \to +\infty,$$

e di nuovo possiamo provare (18).

Cerchiamo ora le stime di $-\omega'$. Da (9) otteniamo immediatamehte le stime dal basso. Inoltre da (8) ricaviamo $\omega'' > 0$ (per grandi $r > 0$); dunque

$$-\omega'(r) \leq \int_{r-1}^{r} -\omega'(s)ds = \omega(r-1) - \omega(r) \leq \omega(r-1)$$

e otteniamo le stime dall'alto.

□

Grazie al Lemma 4, possiamo ora trovare le stime del funzionale J. Questa é la stima cruciale del lavoro e siamo in grado di provarla solo nel caso $\alpha > 1$.

PROPOSIZIONE 5 *Esiste $R_0 > 0$ tale che per ogni $R \geq R_0$, $|x_1| \geq R$, $|x_2| \geq R - \sqrt{R}$, $\sqrt{R} \leq |x_1 - x_2| \leq (2 + \frac{1}{\sqrt{R}-1})\min\{|x_1|, |x_2|\}$, si ha*

$$J(t\omega_1 + (1-t)\omega_2) < S_2 \qquad \forall t \in [0,1], \tag{20}$$

dove $\omega_i = \omega(\cdot - x_i)$, $i = 1, 2$, essendo ω l'unica soluzione radiale di (6).

Avremo bisogno delle seguenti disuguaglianze.

LEMMA 6 1) *Per ogni $\tau \in]0,1[$ e $x, y \in [0, +\infty[$ si ha*

$$x^\tau + y^{1-\tau} \leq (1+x)^\tau (1+y)^{1-\tau} \tag{21}$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $xy = 1$.

2) *Per ogni $\tau \in]0,1[$ e $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, +\infty[$ si ha*

$$a_1^\tau a_2^{1-\tau} + b_1^\tau b_2^{1-\tau} \leq (a_1 + b_1)^\tau (a_2 + b_2)^{1-\tau} \tag{22}$$

e l'uguaglianza vale se $a_1 b_2 = a_2 b_1$.

3) *Per ogni $p \in]1,2[$ e $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ si ha*

$$|\xi + \eta|^p \leq (\langle |\xi|^{p-2}\xi + |\eta|^{p-2}\eta, \xi + \eta\rangle)^{\frac{p}{2}} (|\xi|^p + |\eta|^p)^{\frac{2-p}{2}}. \tag{23}$$

Dimostrazione. Per provare (21) studiamo la funzione di una variabile reale $f_x(y) = (1+x)^\tau(1+y)^{1-\tau} - x^\tau - y^{1-\tau}$: poichè nel punto $y = \frac{1}{x}$ ha un punto di minimo forte e prende il valore $f_x(\frac{1}{x}) = 0$, ne viene subito (21). Da qui anche la (22) si prova semplicemente scegliendo (se $b_1 \neq 0 \neq a_2$) $x = \frac{a_1}{b_1}$, $y = \frac{b_2}{a_2}$ e dividendo (22) per $b_1^\tau a_2^{1-\tau}$; se $b_1 = 0$ o $a_2 = 0$ la (22) è banale. Infine (23) si può trovare in [Y, p.1041].

□

Dimostrazione della Proposizione 5. Poniamo per brevità

$$y = x_2 - x_1, \qquad A = \|\omega\|^p,$$

$$[u, v] = \int |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla v\rangle + \int |u|^{p-2} uv \qquad \forall u, v \in X.$$

Dall'equazione (6), si ha

$$[\omega_1, \omega_2] = q_\infty \int \omega_1^\alpha \omega_2 = q_\infty \int \omega_2^\alpha \omega_1 = [\omega_2, \omega_1],$$

$$A = [\omega, \omega] = q_\infty \int \omega^{\alpha+1}.$$

Consideriamo prima il caso $t = \frac{1}{2}$ e proviamo che

$$J(\omega_1 + \omega_2) < S_2. \tag{24}$$

Da (23) si ottiene

$$\|\omega_1 + \omega_2\|^p \leq \int \Big((|\nabla\omega_1|^p + |\nabla\omega_2|^p + |\nabla\omega_1|^{p-2}\langle\nabla\omega_1, \nabla\omega_2\rangle + $$
$$+ |\nabla\omega_2|^{p-2}\langle\nabla\omega_2, \nabla\omega_1\rangle)^{\frac{p}{2}} (|\nabla\omega_1|^p + |\nabla\omega_2|^p)^{\frac{2-p}{2}} +$$
$$+ (\omega_1^p + \omega_2^p + \omega_1^{p-1}\omega_2 + \omega_2^{p-1}\omega_1)^{\frac{p}{2}} (\omega_1^p + \omega_2^p)^{\frac{2-p}{2}} \Big) \leq$$

(per (22))

$$\leq \int \Big((|\nabla\omega_1|^p + |\nabla\omega_2|^p + |\nabla\omega_1|^{p-2}\langle\nabla\omega_1, \nabla\omega_2\rangle + |\nabla\omega_2|^{p-2}\langle\nabla\omega_2, \nabla\omega_1\rangle +$$
$$+ \omega_1^p + \omega_2^p + \omega_1^{p-1}\omega_2 + \omega_2^{p-1}\omega_1)^{\frac{p}{2}} (|\nabla\omega_1|^p + |\nabla\omega_2|^p + \omega_1^p + \omega_2^p)^{\frac{2-p}{2}} \Big) \leq$$

(per la disuguaglianza di Hölder)

$$\leq (\|\omega_1\|^p + \|\omega_2\|^p + [\omega_1, \omega_2] + [\omega_2, \omega_1])^{\frac{p}{2}} (\|\omega_1\|^p + \|\omega_2\|^p)^{\frac{2-p}{2}} =$$
$$= 2A(1 + \frac{1}{A}[\omega_1, \omega_2])^{\frac{p}{2}}.$$

Stimiamo ora $\int q(x)|\omega_1 + \omega_2|^{\alpha+1}$. Poichè $\alpha > 1$, esiste $c_\alpha > 0$ tale che per ogni a, b numeri reali nonnegativi, vale la seguente disuguaglianza:

$$(a+b)^{\alpha+1} \geq a^{\alpha+1} + b^{\alpha+1} + (\alpha+1)(a^\alpha b + b^\alpha a) - c_\alpha (ab)^{\frac{\alpha+1}{2}};$$

Pertanto si ha

$$q_\infty \int (\omega_1 + \omega_2)^{\alpha+1} \geq 2A + 2(\alpha+1)[\omega_1, \omega_2] - c_\alpha q_\infty \int (\omega_1\omega_2)^{\frac{\alpha+1}{2}}. \tag{25}$$

Usando la stima di ω trovata nel Lemma 4, non é difficile vedere che

$$\int (\omega_1\omega_2)^{\frac{\alpha+1}{2}} = o([\omega_1, \omega_2]), \qquad \text{per } R \to +\infty. \tag{26}$$

Infatti $|y| \geq \sqrt{R}$ e per grandi $|y|$ si ha

$$[\omega_1, \omega_2] = q_\infty \int \omega_1^\alpha \omega_2 = q_\infty \int \omega\omega(\cdot - y)^\alpha \geq c \int_{B(y,1)} \omega \geq c \exp(-\theta^+ |y|) \tag{27}$$

e

$$\int (\omega_1\omega_2)^{\frac{\alpha+1}{2}} = \int (\omega\omega(\cdot - y))^{\frac{\alpha+1}{2}} \leq c \int_{|z|\leq|y|} (\exp(-\theta|z|)\exp(-\theta|z-y|))^{\frac{\alpha+1}{2}} dz +$$
$$+ c\exp(-\theta|y|\frac{\alpha+1}{2}) \int_{|z|>|y|} \omega(z-y)^{\frac{\alpha+1}{2}} dz \leq$$
$$\leq c|y|^N \exp(-\theta|y|\frac{\alpha+1}{2}) + c\exp(-\theta|y|\frac{\alpha+1}{2}),$$

con $\frac{\alpha+1}{2} > 1$. Inoltre da (3) segue che

$$\int (q - q_\infty)(\omega_1 + \omega_2)^{\alpha+1} \geq -c\sum_{i=1}^{2} \int \exp(-\mu|x|)\omega(x - x_i)^{\alpha+1} dx \geq$$
$$\geq -c\sum_{i=1}^{2} \Big(\exp(-\theta(\alpha+1)|x_i|) \int_{|x-x_i|>|x_i|} \exp(-\mu|x|)dx +$$
$$+ \int_{|x-x_i|\leq|x_i|} \exp(-\mu|x|)\exp(-\theta(\alpha+1)|x - x_i|dx \Big) \geq$$

(possiamo assumere che $\mu \in]2\theta, (\alpha+1)\theta] =]2(p-1)^{-\frac{1}{p}}, (\alpha+1)(p-1)^{-\frac{1}{p}}])$

$$\geq -c\sum_{i=1}^{2} (\exp(-\theta(\alpha+1)|x_i|) + |x_i|^N \exp(-\mu|x_i|)) \geq$$

(poichè $|y| = |x_1 - x_2| \leq (2 + \frac{1}{\sqrt{R-1}})|x_i|$ per $i = 1, 2$)

$$\geq -c\exp\Big(- \frac{\mu^-|y|}{2 + \frac{1}{\sqrt{R-1}}} \Big) \geq -c\exp(-\theta^+|y|)$$

per grandi $R > 0$. Richiamando (27) otteniamo

$$\int (q - q_\infty)(\omega_1 + \omega_2)^{\alpha+1} \geq -o([\omega_1, \omega_2]), \qquad \text{per } R \to +\infty. \tag{28}$$

Riunendo (25), (26) e (28) ricaviamo

$$\int q(\omega_1 + \omega_2)^{\alpha+1} \geq 2A + (2(\alpha+1) - o(1))[\omega_1, \omega_2], \qquad \text{per } R \to +\infty.$$

Possiamo infine stimare

$$J(\omega_1 + \omega_2) = \frac{\|\omega_1 + \omega_2\|^p}{(\int q|\omega_1 + \omega_2|^{\alpha+1})^{\frac{p}{\alpha+1}}} \leq \frac{2A(1 + \frac{1}{A}[\omega_1, \omega_2])^{\frac{p}{2}}}{(2A)^{\frac{p}{\alpha+1}}(1 + (\frac{\alpha+1}{A} - o(1))[\omega_1, \omega_2])^{\frac{p}{\alpha+1}}} =$$
$$= (2A)^{1-\frac{p}{\alpha+1}} \frac{1 + \frac{p}{2A}[\omega_1, \omega_2](1 + o(1))}{1 + \frac{p}{A}[\omega_1, \omega_2](1 + o(1))}, \qquad \text{per } R \to +\infty.$$

Poichè

$$S_2 = 2^{1-\frac{p}{\alpha+1}} S_1 = 2^{1-\frac{p}{\alpha+1}} J_\infty(\omega) = 2^{1-\frac{p}{\alpha+1}} \frac{\|\omega\|^p}{(q_\infty \int \omega^{\alpha+1})^{\frac{p}{\alpha+1}}} = 2^{1-\frac{p}{\alpha+1}} \frac{A}{A^{\frac{p}{\alpha+1}}} = (2A)^{1-\frac{p}{\alpha+1}},$$

questo prova (24).

Passiamo ora alla prova di (20)per valori arbitrari di $t \in [0,1]$. Si vede facilmente che $J(\omega_2) \to J_\infty(\omega_2) = S_1 < S_2$, per $R \to +\infty$, e che $J(t\omega_1 + (1-t)\omega_2) \to J(\omega_2)$ per $t \to 0$, uniformemente in $R \geq R_0$. Dunque esiste un piccolo $\delta > 0$ indipendente da R tale che (20) vale per ogni $t \in [0,\delta]$. Allo stesso modo vediamo che (20) vale per $t \in [1-\delta, 1]$.

Consideriamo ora $t \in [\delta, 1-\delta]$ e poniamo $v_1 = t\omega_1$, $v_2 = (1-t)\omega_2$. Ragionando come nel caso $t = \frac{1}{2}$ otteniamo

$$\|v_1 + v_2\|^p \leq (\|v_1\|^p + \|v_2\|^p + [v_1, v_2] + [v_2, v_1])^{\frac{p}{2}} (\|v_1\|^p + \|v_2\|^p)^{\frac{2-p}{2}} =$$
$$= (t^p + (1-t)^p) A \Big(1 + \frac{1}{A}[\omega_1, \omega_2] \frac{t^{p-1}(1-t) + (1-t)^{p-1}t}{t^p + (1-t)^p}\Big)^{\frac{p}{2}}$$

e

$$\int q(v_1 + v_2)^{\alpha+1} \geq (t^{\alpha+1} + (1-t)^{\alpha+1})A + (\alpha+1)(t^\alpha(1-t) + t(1-t)^\alpha)[\omega_1, \omega_2](1 + o(1)), \qquad \text{as } R \to +\infty.$$

Dunque

$$J(v_1 + v_2) \leq S_2 \varrho(t) \frac{1 + \nu(t)\frac{p}{A}[\omega_1, \omega_2](1 + o(1))}{1 + \mu(t)\frac{p}{A}[\omega_1, \omega_2](1 + o(1))}, \qquad \text{per } R \to +\infty, \tag{29}$$

dove $\varrho(t) = \frac{t^p + (1-t)^p}{2} \left(\frac{t^{\alpha+1} + (1-t)^{\alpha+1}}{2}\right)^{-\frac{p}{\alpha+1}}$, $\nu(t) = \frac{t^{p-1}(1-t) + (1-t)^{p-1}t}{2(t^p + (1-t)^p)}$, $\mu(t) = \frac{t^\alpha(1-t) + (1-t)^\alpha t}{t^{\alpha+1} + (1-t)^{\alpha+1}}$. Richiamiamo anche che

$$[\omega_1, \omega_2] \to 0, \qquad \text{per } R \to +\infty. \tag{30}$$

Poichè $\frac{\nu(\frac{1}{2})}{\mu(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}$ e ν, μ sono funzioni continue, esiste $\sigma > 0$ tale che $\max_{|t-\frac{1}{2}| \leq \sigma} \frac{\nu(t)}{\mu(t)} < 1$. Poiché $\varrho(t) \leq 1$ ne viene (20) per $|t - \frac{1}{2}| \leq \sigma$. D'altra parte, poichè

$$\varrho(t) = \frac{\varphi(t^{\alpha+1}) + \varphi((1-t)^{\alpha+1})}{2} \left(\varphi\Big(\frac{t^{\alpha+1} + (1-t)^{\alpha+1}}{2}\Big)\right)^{-1}$$

dove $\varphi(s) = s^{\frac{p}{\alpha+1}}$ è una funzione strttamente crescente, otteniamo $\max_{\sigma \leq |t-\frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}-\delta} \varrho(t) < 1$. Pertanto (per (30) e (29)) (20) vale anche per $\sigma \leq |t - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2} - \delta$.

□

Siamo ora in grado di provare il risultato di esistenza.

Dimostrazione del Teorema 1. Segue dalla Proposizione 5 e dal Teorema 2 usando il metodo di mini-max introdotto in [BL] che si può adattare senza difficoltà al nostro contesto. In questo modo

si trova un valore di mini-max a un livello $c_0 \in]S_1, S_2[$ che è un livello di compattezza in forza del Teorema 2.

□

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[ABC] A. AMBROSETTI, M. BADIALE, S. CINGOLANI, *Semiclassical states of nonlinear Schrödinger equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **140** (1997), 285-300.

[BC] M. BADIALE, G. CITTI, *Concentration compactness principle and quasilinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^n$, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991), 1795-1818.

[BL] A. BAHRI, Y.Y. LI, *On a min-max procedure for the existence of a positive solution for certain scalar field equations in* $\mathbb{R}^N$, Rev. Mat. Iberoamericana **6** (1990), 1-15.

[BLn] A. BAHRI, P.L. LIONS, *On the existence of a positive solution of semilinear elliptic equations in unbounded domains*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **14** (1997), 365-413.

[BeC] V. BENCI, G. CERAMI, *Positive solutions of some nonlinear elliptic problems in exterior domains*, Arch. Rational Mech. Anal. **99** (1987), 283-300.

[BeL] H. BERESTYCKI, P.L. LIONS, *Nonlinear scalar field equations, I: Existence of a ground state*, Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), 313-345.

[C1] G. CITTI, *Positive solutions for a quasilinear degenerate elliptic equation in* R^N, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **35** (1986), 364-375.

[C2] G. CITTI, *A uniqueness theorem for radial ground states of the equation* $\Delta_p u + f(u) = 0$, Boll. Un. Mat. Ital. (7) **7**-B (1993), 283-310.

[D] E. DI BENEDETTO, $C^{1+\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. **7** (1983), 827-850.

[DF] M. DEL PINO, P.L. FELMER, *Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. Partial Differential Equations **4** (1996), 121-137.

[DN] W.Y. DING, W.M. NI, *On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **91** (1986), 283-308.

[DPR]L. Damascelli, F. Pacella, M. Ramaswamy, *Symmetry of ground states of p-Laplace equations via the moving plane method* Arch. Rational Mech. Anal. **148** (1999), 291-308.

[E] H. Egnell, *Existence results for some quasilinear elliptic equations*, Variational methods, Proc. Conf., Paris/Fr. 1988, Prog. Nonlinear Differ. Equ. Appl. **4** (1990), 61-76.

[GA] J.V. Goncalves, C.O. Alves, *Existence of positive solutions for m-Laplacian equations in* $\mathbb{R}^N$ *involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. **32** (1998), 53-70.

[GS] L. Gongbao, Y. Shusen, *Eigenvalue problems for quasilinear elliptic equations on* $\mathbb{R}^N$, Comm. Partial Differential Equations **14** (1989), 1291-1314.

[L1] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1** (1984), 109-145, 223-283.

[L2] P.L. Lions, *On positive solutions of semilinear elliptic equations in unbounded domains*, Nonlinear diffusion equations and their equilibrium states II, Proc. Microprogram, Berkeley/Calif. 1986, Publ., Math. Sci. Res. Inst. **13** (1988), 85-122.

[NSJ] E.S. Noussair, C.A. Swanson, Y. Jianfu, *Quasilinear elliptic problems with critical exponents*, Nonlinear Anal. **20** (1993), 285-301.

[O] J.M.B. do Ó, *Solutions to perturbed eigenvalue problems of the p-Laplacian in* $\mathbb{R}^N$, Electron. J. Differential Equations **1997** (1997), 1-15.

[PS] P. Pucci, J. Serrin, *Uniqueness of ground states for quasilinear elliptic operators*, Indiana Univ. Math. J. **47** (1998), 501-528.

[S] J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasi-linear equations*, Acta Math. **111** (1964), 247-302.

[SY] C.A. Swanson, L.S. Yu, *Critical p-Laplacian problems in* $\mathbb{R}^N$, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **169** (1995), 233-250.

[V] J.L. Vázquez, *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim. **12** (1984), 191-202.

[W] X. Wang, *On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys. **153** (1993), 229-244.

[Y] L.S. Yu, *Nonlinear p-Laplacian problems on unbounded domains*, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), 1037-1045.